OVERSIGT OVER DET KGL. DANSKE VIDENSKABERNES SELSKABS
FORHANDLINGER. 1915. N° 5.

SUR LES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES RÉSOLUBLES PAR DES RACINES CARRÉES ET CUBIQUES.

PAR

JOHANNES MOLLERUP.

Il est bien connu que Julius Petersen (voir par exemple: De algebraiske Ligningers Theori p. 161—171) a établi une suite de théorèmes relatifs aux équations algébriques résolubles par des racines carrées. Voici les plus importants de ces théorèmes:

1. Le degré d'une équation irréductible résoluble par des racines carrées est toujours une puissance du nombre 2, et les racines d'une telle équation ne diffèrent entre elles que par les signes des radicaux.

2. Une racine d'une équation irréductible du degré 2^p résoluble par des racines carrées contient précisément p radicaux.

3. Les racines de cette équation étant

$$x_1,\ x_2 \ldots x_{2m},\ 2m = 2^p,$$

une certaine valeur de la fonction des racines

$$(x_1 + x_2 + \ldots x_m)\ (x_{m+1} + x_{m+2} + \ldots x_{2m})$$

est nécessairement un nombre rationnel.

Appliquant ce dernier théorème, puis introduisant une certaine racine carrée, on peut réduire l'équation proposée du degré 2^p à une équation du degré 2^{p-1}, et ainsi de suite. Une telle réduction successive donnera finalement les racines de l'équation proposée.

Il est évident que l'on pourra construire les racines en question avec la règle et le compas. Or, en lisant le beau livre de M. HJELMSLEV (Geometriske Eksperimenter), j'eus envie d'essayer une extension du problème susdit de JULIUS PETERSEN. Quoique je ne suis pas encore arrivé à une solution générale, j'ai néanmoins trouvé des résultats pouvant peut-être contribuer à la résolution algébrique des équations d'un degré quelconque résolubles par des racines carrées et cubiques.

1. Classification des racines carrées et cubiques.

L'ensemble des fonctions rationnelles aux coefficients rationnels du nombre $\sqrt{-3}$ forme une classe de nombres que nous désignons par R_0; donc R_0 contient tous les nombres rationnels et en outre les valeurs de $\sqrt[3]{1}$,

$$\varepsilon = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3}, \quad \varepsilon^2 = -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-3}.$$

Dans ce qui suit nous désignons simplement comme rationnels les nombres contenus dans la classe R_0. Prenons maintenant les racines carrées et cubiques des nombres de R_0 et formons de ces racines toutes les fonctions rationnelles possibles, dont les coefficients sont des nombres de R_0, nous aurons, en supprimant les nombres de R_0, une nouvelle classe de nombres R_1.

Prenons ensuite les racines carrées et cubiques des nombres de R_1 et formons de ces racines nouvelles toutes les fonctions rationnelles possibles, dont les coefficients sont des nombres de R_0 et de R_1; nous aurons ainsi en supprimant tous les nombres contenus et dans R_0 et dans R_1 une nouvelle classe de nombres R_2.

En continuant de cette manière nous trouvons successivement les classes

$$R_0, R_1, R_2 \ldots, R_n, \ldots$$

Or, il faut suppléer la définition de ces classes de nombres par les remarques suivantes.

Les radicaux qui appartiennent à la même classe doivent être rationnellement indépendants entre eux; c'est-à-dire qu'il ne doit pas exister, entre un nombre fini des radicaux susdits, des relations linéaires dont les coefficients appartenant aux classes précédantes sont différents de zéro.

Par exemple, l'équation $\sqrt[3]{7^4} - 7\sqrt[3]{7} = 0$ montre que le radical $\sqrt[3]{7^4}$ ne doit pas être admis en R_1 qui contient déjà le radical $\sqrt[3]{7}$.

De plus, nous remarquons expressément qu'une racine carrée doit toujours être admise en une classe antérieurement à une racine cubique qui en dépend.

Ces remarques faites, nous désignons par $\sqrt[3]{a}$ un radical de R_n, a appartenant à R_{n-1}; supposons encore différents de zéro les coefficients M, N et P; puis considérons l'équation quadratique

$$M \cdot \left(\sqrt[3]{a}\right)^2 + N \cdot \sqrt[3]{a} + P = 0.$$

Nous aurons

$$\sqrt[3]{a} = \frac{-N \pm \sqrt{N^2 - 4PM}}{2M}.$$

Cela posé, on voit qu'il est impossible que M, N, P appartiennent à une des classes qui précèdent R_n; car la racine carrée $\sqrt{N^2 - 4PM}$ devait alors être admise antérieurement à la racine cubique $\sqrt[3]{a}$. Nous supposons par conséquent qu'une au moins des grandeurs M, N, P appartienne à la classe R_n en étant admis antérieurement à $\sqrt[3]{a}$.

Considérons (à l'instant) comme base l'ensemble des nombres contenus dans R_{n-1} et les coefficients M, N, P, nous verrons que l'équation cubique

$$x^3 = a$$

est résoluble par l'adjonction de la racine carrée

$$\sqrt{N^2 - 4PM};$$

c'est-à-dire que l'équation cubique susdite aura, en vertu d'un théorème bien connu, une racine β compris dans l'ensemble que nous avons pris pour base et en outre les racines $\beta\varepsilon$ et $\beta\varepsilon^2$ $\left(\varepsilon = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3}\right)$. Remarquons maintenant que M, N, P sont déjà admis à la classe R_n, il est évident que le radical $\sqrt[3]{a}$ ne peut pas être admis à cette même classe parce qu'elle s'exprime rationnellement par les nombres M, N, P.

Revenons maintenant à l'équation quadratique

$$M\left(\sqrt[3]{a}\right)^2+N\sqrt[3]{a}+P = 0$$

qui est une relation entre les quantités M, N, P et $\sqrt[3]{a}$, puis supposons que M, N et P appartiennent à la même classe que $\sqrt[3]{a}$ ou a une classe précédante, nous aurons toujours

$$M = N = P = 0,$$

pourvu que M, N et P soient supposés indépendants de $\sqrt[3]{a}$.

Dans ce qui suit nous supposons toujours que les coefficients de l'équation algébrique que nous avons à étudier appartiennent à la classe R_0.

2. L'ensemble des racines de l'équation.

Ces remarques introductives faites, nous avons à démontrer le théorème suivant:

Supposons que l'équation algébrique $f(x) = 0$ ait une racine exprimable par des racines carrées et cubiques, cette même équation aura aussi toutes les racines conjuguées, savoir les expressions obtenues de la racine susdite en y remplaçant le radical $\sqrt{u}$ par le radical conjugué $-\sqrt{u}$ ou le radical $\sqrt[3]{u}$ par les deux radicaux conjugués $\varepsilon\cdot\sqrt[3]{u}$ et $\varepsilon^2\cdot\sqrt[3]{u}$.

En effet, supposons que la racine en question appartienne à la classe R_p et qu'elle contienne la racine carrée $\sqrt{u}$ de la même classe, savoir

$$x_1 = m + n\sqrt{u},$$

nous aurons

$$f(x_1) = M + N\sqrt{u} = 0$$

ce qui donnera

$$M = N = 0.$$

Supposons ensuite que la racine susdite contienne la racine cubique $\sqrt[3]{u}$ de la classe R_p, nous aurons de même

$$f(x_1) = M\left(\sqrt[3]{u}\right)^2 + N\sqrt[3]{u} + P = 0,$$

ce qui donnera

$$M = N = P = 0.$$

Cela posé, ordonnons M et N, respectivement M, N et P d'après un des radicaux de la classe la plus elevée, chacune des conditions que nous venons de trouver se divise en plusieurs d'autres, et ainsi de suite.

De cette manière nous trouvons finalement un système des équations rationnelles, système qui deviendra le même, quand nous remplaçons la racine en question par une quelconque des valeurs conjuguées.

3. Le degré de l'équation; les radicaux indépendants.

Supposons que l'équation irréductible $f(x) = 0$ ait une racine qui contient p racines carrées et q racines cubiques, le degré de $f(x)$ est toujours diviseur de $2^p \cdot 3^q$. Les deux nombres p et q se déterminent, si nous comptons en premier lieu les radicaux adjoints de la classe R_1, puis les radicaux adjoints de R_2 et ainsi de suite.

Soient

$$x_1,\ x_2 \ldots x_\mu,\quad \mu = 2^p \cdot 3^q$$

la racine susdite et les valeurs conjuguées, ces μ valeurs ne sont pas nécessairement différentes entre elles. Posons

$$x_1 = m + n\sqrt{a},\quad x_2 = m - n\sqrt{a},$$

et encore

$$(1)\quad f_1(x) = (x - x_1)(x - x_2) = x^2 - 2mx + m^2 - n^2 a;$$

ce polynome ne contient plus $\sqrt{a}$. Soient au contraire

$$\begin{aligned} x_1 &= m + n\sqrt[3]{a} + p\left(\sqrt[3]{a}\right)^2 \\ x_2 &= m + n\sqrt[3]{a}\cdot\varepsilon + p\left(\sqrt[3]{a}\right)^2\cdot\varepsilon^2 \\ x_3 &= m + n\sqrt[3]{a}\cdot\varepsilon^2 + p\left(\sqrt[3]{a}\right)^2\cdot\varepsilon, \end{aligned}$$

nous posons analoguement

$$(2) \qquad f_1(x) = (x - x_1)\cdot(x - x_2)\cdot(x - x_3)$$

$$= x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - npa)x + (m^3 + n^3a + p^3a^2 - 3mnpa),$$

et ce polynome ne contient plus $\sqrt[3]{a}$.

Nous désignons comme **indépendants** les radicaux $\sqrt{a}$ respectivement $\sqrt[3]{a}$, contrairement aux autres radicaux disparus peut-être par la multiplication susdite.

Dans les deux cas que nous venons d'étudier le polynome susdit $f_1(x)$ peut être ordonné d'après un radical carré on cubique. Remplaçons le radical en question ou par le radical conjugué ou par les deux radicaux conjugués nous aurons un polynome $f_2(x)$ conjugué à $f_1(x)$ respectivement deux tels polynomes $f_2(x)$ et $f_3(x)$. De l'équation

$$(3) \qquad f_1(x) = \begin{cases} (x - x_1)\ (x - x_2) \\ (x - x_1)\ (x - x_2)\ (x - x_3) \end{cases}$$

nous trouvons dans les deux cas

$$(4) \qquad f_2(x) = \begin{cases} (x - x_3)\ (x - x_4) \\ (x - x_4)\ (x - x_5)\ (x - x_6) \end{cases}$$

ou

$$(4a) \qquad f_2(x) = \begin{cases} (x - x_3)\ (x - x_4) \\ (x - x_4)\ (x - x_5)\ (x - x_6) \end{cases}$$

et

$$(4b) \qquad f_3(x) = \begin{cases} (x - x_5)\ (x - x_6) \\ (x - x_7)\ (x - x_8)\ (x - x_9), \end{cases}$$

les facteurs de $f_2(x)$, respectivement $f_2(x)$ et $f_3(x)$, étant conjugués aux facteurs de $f_1(x)$ par rapport au radical en question. De plus deux polynomes conjugués $f_1(x)$ et $f_2(x)$ respectivement $f_1(x)$ et $f_2(x)$, $f_1(x)$ et $f_3(x)$, $f_2(x)$ et $f_3(x)$ sont sans racine commune parce qu'elles sont toutes les deux irréductibles dans le même corps de rationalité.

Le produit

$$(5) \qquad F_1(x) = \begin{cases} f_1(x) \cdot f_2(x) \\ f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot f_3(x) \end{cases}$$

ne contient plus le radical susdit, c'est-à-dire que ce radical est indépendant, ne disparaîssant que par la multiplication des facteurs conjugués. Maintenant le polynome $F_1(x)$ peut être ordonné d'après une racine carrée ou cubique; multipliant $F_1(x)$ par le polynome conjugué, respectivement par les deux polynomes conjugués, le radical en question disparaîtra, et ainsi de suite. De cette manière on trouvera finalement la fonction donnée.

Soient

$$\sqrt[n_1]{a_1}, \ \sqrt[n_2]{a_2} \ \ldots . \ \sqrt[n_k]{a_k}$$

les radicaux indépendants successifs, le degré de l'équation donnée est précisement égal au produit

$$n_1 \cdot n_2 \ \ldots . \ n_k.$$

Considérons maintenant le produit

$$(6) \qquad F(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ \ldots . \ (x - x_\mu);$$

je dis que tous les coefficients de ce polynome entier de x sont des nombres rationnels.

En effet, remplaçons un radical quelconque, trouvé dans une des racines, avec un radical conjugué, plusieurs de ces racines seront peut-être permutées, ce qui n'altère pas le polynome $F(x)$.

De plus, les racines de $F(x)$ sont toutes de la même multiplicité; au cas contraire on pourrait, en divisant $F(x)$ par une puissance convenable de $f(x)$, former un polynome aux coefficients rationnels contenant quelques-unes des racines, mais non pas toutes les racines, ce qui donnerait une contradiction. Alors le degré de $f(x)$ sera diviseur du degré $\mu = 2^p \cdot 3^q$ de $F(x)$.

Supposons maintenant que le degré de $f(x)$ soit 2^n ou 3^n, tous les radicaux indépendants sont des racines carrées respectivement des racines cubiques.

4. Réduction à une équation du degré 3^n.

Une équation irréductible qui est résoluble par des racines carrées et cubiques pourra toujours être résolue à l'aide d'une équation, dont le degré est une puissance de 3, et une suite des équations quadratiques.

En effet, soit $2^p \cdot 3^q$ le degré de l'équation proposée $f(x) = 0$. Soient ensuite x_1 et x_2 deux racines quelconques de $f(x) = 0$, la fonction des racines

$$k = x_1 x_2$$

aura

$$\lambda = \frac{2^p \cdot 3^q (2^p \cdot 3^q - 1)}{2} = 2^{p-1} \cdot 3^q (2^p \cdot 3^q - 1)$$

valeurs différentes; c'est-à-dire que k est racine d'une équation du degré λ et définie dans la classe R_0. Remarquons ensuite que k contient précisément les mêmes radicaux que x_1 et x_2, tandis que le nombre n'est pas, pour $q \neq 0$, de la forme $2^r \cdot 3^s$; c'est-à-dire que l'équation susdite du degré λ est réductible et se décompose en autres équations, dont les degrés auront la somme λ. Parmi ces équations une au moins est du degré $2^r \cdot 3^s$, où $r \leq p-1$; car le nombre λ n'est pas divisible par 2^p, ce qui est vrai aussi pour $q = 0$.

Supposons trouvé le produit $k = x_1 \cdot x_2$ à l'aide de l'équation susdite du degré $2^r \cdot 3^s$, où $r \leq p-1$, l'équation donnée $f(x) = 0$ et l'équation $f\left(\frac{k}{x}\right) = 0$, à laquelle nous donnons une forme entière, auront les racines communes x_1 et x_2; c'est-à-dire que x_1 et x_2 sont les racines d'une équation quadratique de la forme

$$x^2 + \varphi(k) \cdot x + k = 0,$$

$\varphi(k)$ étant une fonction rationnelle en k. En suivant JULIUS PETERSEN (l. c. p. 165—166) nous pouvons supposer que les deux équations susdites n'ont pas de racines communes outre x_1 et x_2.

Maintenant nous avons vu que l'équation proposée $f(x) = 0$ du degré $2^p \cdot 3^q$ peut être résolue à l'aide d'une équation du degré $2^r \cdot 3^s$, $r \leqq p-1$ et une équation quadratique.

Décomposons de la même manière la nouvelle équation du degré $2^r \cdot 3^s$ et ainsi de suite, nous verrons que la résolution de l'équation proposée $f(x) = 0$ est réduite à la résolution d'une équation, dont le degré est une puissance de 3, et de p équations quadratiques au plus.

5. Les équations du troisième et du quatrième degré.

Pour éclaircir nos développements suivants il nous semble utile résoudre, de notre point de vue, les équations cubiques et biquadratiques.

Quant à l'équation cubique

$$x^3 + ax + b = 0,$$

nous verrons, en vertu d'un théorème bien connu, que le dernier radical qu'il faut adjoindre pour trouver les racines correspond à l'exposant 3, parce que cet exposant est diviseur du nombre premier 3; c'est-à-dire que les racines se présentent sous la forme

$$(1) \begin{cases} x_1 = \sqrt[3]{u} + p\left(\sqrt[3]{u}\right)^2 \\ x_2 = \sqrt[3]{u} \cdot \varepsilon + p\left(\sqrt[3]{u}\right)^2 \cdot \varepsilon^2 \\ x_3 = \sqrt[3]{u} \cdot \varepsilon^2 + p \cdot \left(\sqrt[3]{u}\right)^2 \cdot \varepsilon, \end{cases}$$

en remarquant que la somme des ces racines est égale à zéro.

On aura (voir 3, (2))

$$(2) \begin{cases} x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = -3pu = a \\ x_1 x_2 x_3 = u + p^3 u^2 = -b, \end{cases}$$

de sorte que u et $p^3 u^2$ sont les racines de l'équation quadratique

$$(3) \qquad z^2 + bz - \frac{a^3}{27} = 0.$$

De cette manière nous trouvons

$$(4) \quad \begin{cases} \sqrt[3]{u} = \sqrt[3]{-\dfrac{b}{2} + \sqrt{\dfrac{b^2}{4} + \dfrac{a^3}{27}}} \\[2ex] p \cdot \left(\sqrt[3]{u}\right)^2 = \sqrt[3]{-\dfrac{b}{2} - \sqrt{\dfrac{b^2}{4} + \dfrac{a^3}{27}}}, \end{cases}$$

et nous aurons de plus

$$\sqrt[3]{u} \cdot p \left(\sqrt[3]{u}\right)^2 = -\frac{a}{3}.$$

Posons ensuite

$$(5) \qquad u = -\frac{b}{2} + \omega, \quad \omega = \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}},$$

il en résulte

$$p \cdot \left(\sqrt[3]{u}\right)^2 = -\frac{a}{3\sqrt[3]{u}} = -\frac{a \cdot \left(\sqrt[3]{u}\right)^2}{3u},$$

ce qui donnera

$$p = -\frac{a}{3\left(-\dfrac{b}{2} + \omega\right)} = -\frac{9\left(\dfrac{b}{2} + \omega\right)}{a^2},$$

de sorte que nous aurons finalement

$$(6) \qquad x_1 = \sqrt[3]{u} - \frac{9}{a^2}\left(\frac{b}{2} + \omega\right) \cdot \left(\sqrt[3]{u}\right)^2,$$

tandis que x_2 et x_3 seront les valeurs conjuguées de x_1, qui correspondent aux valeurs conjuguées de $\sqrt[3]{u}$; c'est-à-dire les trois racines x_1, x_2 et x_3 appartiennent à la même classe.

Remplaçons, au contraire, ω par sa valeur conjuguée, les trois racines ne s'altèrent pas; c'est-à-dire que nous avons démontré la proposition suivante:

Les trois racines de l'équation cubique appartiennent généralement à la classe R_2, et, pour trouver ces racines, il faut adjoindre les radicaux

$$\omega = \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}, \quad \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \omega}$$

appartenant respectivement à R_1 et R_2. De plus, nous verrons que le radical correspondant à l'exposant 3 est indépendant, tandis que le radical ω ne possède pas une telle propriété.

Étudions maintenant l'équation biquadratique

$$x^4 + Ax^2 + Bx + C = 0,$$

les radicaux indépendants correspondent à l'exposant 2. Posons

$$x_1 = a + \sqrt{\alpha}, \; x_2 = a - \sqrt{\alpha},$$

nous trouvons

$$(x - x_1)(x - x_2) = x^2 - 2ax + a^2 - \alpha;$$

de plus, ordonnons et $-2a$ et $a^2 - \alpha$ d'après la même racine carrée $\sqrt{\beta}$, ce qui est toujours possible, le nombre α aura évidemment la même propriété; c'est-à-dire que les racines de l'équation biquadratique proposée se présentent comme suit

$$(7)\left\{\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{\beta} + \sqrt{\alpha_1 + \alpha_2\sqrt{\beta}} \\ x_2 &= \sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha_1 + \alpha_2\sqrt{\beta}} \\ x_3 &= -\sqrt{\beta} + \sqrt{\alpha_1 - \alpha_2\sqrt{\beta}} \\ x_4 &= -\sqrt{\beta} + \sqrt{\alpha_1 - \alpha_2\sqrt{\beta}}. \end{aligned}\right.$$

De cette manière nous trouvons

$$(8)\left\{\begin{aligned} \Sigma x_j x_k &= -2(\beta + \alpha_1) = A \\ \Sigma x_i x_j x_k &= 4\alpha_2\beta = B \\ x_1 x_2 x_3 x_4 &= \beta^2 + \alpha_1^2 - 2\beta\alpha_1 - \beta\alpha_2^2 = C, \end{aligned}\right.$$

de sorte que β est racine du résolvant cubique

$$(9) \qquad 4\beta^3 + 2A \cdot \beta^2 + \left(\frac{A^2}{4} - C\right)\beta - \frac{B^2}{16} = 0,$$

tandis que α_1 et α_2 se présentent sous forme des fonctions rationnelles de β.

Cela posé, il est évident que la racine x_1 contient les radicaux

$$\sqrt{}\,,\quad \sqrt[3]{}\,,\quad \sqrt{}\,,\quad \sqrt{}\,,$$

dont les deux derniers sont indépendants, tandis que les deux premiers ne le sont pas.

Étudions ensuite la fonction

$$(10) \qquad (x_i + x_j)\,(x_k + x_l)$$

des racines; nous trouvons ces trois valeurs différentes

$$(11) \begin{cases} (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) = -4\beta \\ (x_1 + x_3)(x_2 + x_4) = -(2\alpha_1 + 2\sqrt{\alpha_1^2 - \alpha_2^2\beta}) \\ (x_1 + x_4)(x_2 + x_3) = -(2\alpha_1 - 2\sqrt{\alpha_1^2 - \alpha_2^2\beta}), \end{cases}$$

valeurs qui sont les racines d'un résolvant cubique généralement irréductible, savoir essentiellement le même résolvant que le résolvant susdit (9) pour β.

Cela posé, il est évident que les trois valeurs de

$$(x_i + x_j)\,(x_k + x_l)$$

appartiennent à la même classe; ainsi le radical $\sqrt{\alpha_1^2 - \alpha_2^2\beta}$ ne peut pas transmettre les deux valeurs

$$(x_1 + x_3)\,(x_2 + x_4), \quad (x_1 + x_4)\,(x_2 + x_3)$$

dans la classe suivante.

Les deux racines d'une équation cubique réduite, à l'aide d'une racine, à une équation quadratique se présentent toujours dans cette forme; mais supposons que α_1, α_2 et β soient des nombres rationnels, nous verrons immédiatement que

$$(x_1 + x_2)\,(x_3 + x_4) = -4\beta$$

est la seule valeur rationnelle du produit

$$(x_i + x_j)\,(x_k + x_l).$$

En effet, supposons rationnel le produit en question, les trois radicaux qui se trouvent dans

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$$

savoir

$$\sqrt{\beta},\ \sqrt{\alpha_1 + \alpha_2\sqrt{\beta}},\ \sqrt{\alpha_1 - \alpha_2\sqrt{\beta}}$$

disparaîtront ; c'est-à-dire que les deux facteurs du produit susdit sont conjugués par rapport à une seule des radicaux indiqués, tandis qu'ils sont tous deux conjugués à soi-même par rapport aux deux autres radicaux.

Supposons par exemple que les deux facteurs en question soient conjugués par rapport à $\sqrt{\beta}$, le facteur qui contient la racine x_1 doit contenir aussi la racine x_2, de sorte que nous trouvons précisément la valeur

$$(x_1 + x_2)\,(x_3 + x_4).$$

Supposons, au contraire, conjugués les deux facteurs en question par rapport au radical $\sqrt{\alpha_1 + \alpha_2\sqrt{\beta}}$, le facteur qui contient x_1 doit contenir aussi ou x_3 ou x_4. Remarquons maintenant que chacun des facteurs des deux produits

$$(x_1 + x_3)\,(x_2 + x_4),\quad (x_1 + x_4)\,(x_2 + x_3)$$

contient deux radicaux par rapport auxquels ils sont conjugués, il est évident que les deux produits contiennent toujours une racine carrée, de sorte qu'ils ne sont pas rationnels.

Retournons encore une fois au cas général, où β, α_1 et α_2 appartiennent à la classe R_2, les deux valeurs

$$(x_1 + x_3)\,(x_2 + x_4),\quad (x_1 + x_4)\,(x_2 + x_3),$$

en vertu de la définition de la classe R_0, contenant les nombres ε et ε^2, restent dans la même classe que

$$(x_1 + x_2)\,(x_3 + x_4).$$

6. L'équation du sixième degré.

Étudions maintenant l'équation du sixième degré

$$f(x) = x^6 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0,$$

résoluble par des radicaux carrés et cubiques avec les racines

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6,$$

nous avons à chercher un résolvant pour déterminer la fonction suivante des racines

$$u = (x_i + x_j + x_k)(x_l + x_m + x_n),$$

où i, j, k, l, m, n est une permutation quelconque des indices 1, 2, 3, 4, 5, 6. La fonction u a

$$\frac{1}{2} \cdot K_{6,3} = 10$$

valeurs qui se présentent comme des racines d'un résolvant du dixième degré, défini dans la classe R_0.

Remarquons maintenant que les racines du résolvant susdit contiennent les mêmes radicaux que les racines de l'équation proposée, il est évident que ce résolvant doit être réductible et se décomposer en des équations dont les degrés sont des nombres de la forme $2^p \cdot 3^q$.

Les décompositions correspondantes du nombre 10 seront

$$10 = 3^2 + 1 = 3 \cdot 2 + 4 = 2^3 + 2,$$

et il est possible que l'équation nouvelle du degré 9, 6, 8 respectivement est encore réductible.

Cela posé, il est évident qu'une valeur spéciale de u peut être déterminée à l'aide d'une équation du degré 1, 4, 2 respectivement.

Supposons maintenant connue une valeur de u, savoir

$$u = (x_1 + x_2 + x_3)(x_4 + x_5 + x_6) = -(x_1 + x_2 + x_3)^2,$$

nous aurons

$$x_1 + x_2 + x_3 = \sqrt{-u}.$$

De plus, nous savons, en vertu d'un théorème de Galois (voir par exemple Julius Petersen: De algebraiske Ligningers Theori, p. 127), que les fonctions symétriques

$$x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3, \quad x_1 x_2 x_3$$

s'expriment sous forme des fonctions rationnelles de $\sqrt{-u}$; c'est-à-dire que x_1, x_2, x_3 sont les racines d'une équation cubique appartenant à la même classe que $\sqrt{-u}$. Ces trois racines déterminées, nous trouvons les trois autres x_4, x_5, x_6 en remplaçant, dans ces expressions, $\sqrt{-u}$ par $-\sqrt{-u}$.

Dans les trois cas possibles que nous venons d'énumérer, la racine x_1 contiendra respectivement les radicaux suivants

$$\begin{array}{ll} 1) & \sqrt{},\ \sqrt{},\ \sqrt[3]{} \\ 2) & \sqrt{},\ \sqrt[3]{},\ \sqrt{},\ \sqrt{},\ \sqrt{},\ \sqrt{},\ \sqrt[3]{} \\ 3) & \sqrt{},\ \sqrt{},\ \sqrt{},\ \sqrt[3]{}. \end{array}$$

Étudions maintenant d'un autre point de vue le problème qui nous occupe; nous savons que la racine x_1 doit contenir deux radicaux indépendants, qui correspondent aux exposants 2 et 3.

En premier lieu, supposons que le radical à l'extérieur correspond à l'exposant 2, et posons

$$(1)\begin{cases} x_1 = a + \sqrt{\alpha} \\ x_2 = a - \sqrt{\alpha}, \end{cases}$$

nous aurons

$$(x - x_1)(x - x_2) = x^2 - 2ax + a^2 - \alpha,$$

et ce polynome peut être ordonné d'après le racine cubique $\sqrt[3]{\beta}$; c'est-à-dire que $2a$ et α auront la même propriété. Remarquons ensuite que la somme des racines est égale à zéro, nous pouvons admettre

$$(2)\begin{cases} 2a = x_1 + x_2 = \sqrt[3]{\beta} + b\left(\sqrt[3]{\beta}\right)^2 \\ x_3 + x_4 = \sqrt[3]{\beta}\cdot\varepsilon + b\cdot\left(\sqrt[3]{\beta}\right)^2\cdot\varepsilon^2 \\ x_5 + x_6 = \sqrt[3]{\beta}\cdot\varepsilon^2 + b\cdot\left(\sqrt[3]{\beta}\right)^2\cdot\varepsilon. \end{cases}$$

Posons ensuite

$$(3)\qquad \alpha = \alpha_1 + \alpha_2\sqrt[3]{\beta} + \alpha_3\left(\sqrt[3]{\beta}\right)^2,$$

nous trouvons pour les racines les expressions suivantes

$$(4)\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{\beta} + b\left(\sqrt[3]{\beta}\right)^2\right) + \sqrt{\alpha_1 + \alpha_2\sqrt[3]{\beta} + \alpha_3\left(\sqrt[3]{\beta}\right)^2} \\ x_2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{\beta} + b\left(\sqrt[3]{\beta}\right)^2\right) - \sqrt{\alpha_1 + \alpha_2\sqrt[3]{\beta} + \alpha_3\left(\sqrt[3]{\beta}\right)^2} \\ x_3 = \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{\beta}\cdot\varepsilon + b\left(\sqrt[3]{\beta}\right)^2\cdot\varepsilon^2\right) + \sqrt{\alpha_1 + \alpha_2\sqrt[3]{\beta}\cdot\varepsilon + \alpha_3\left(\sqrt[3]{\beta}\right)^2\varepsilon^2} \\ x_4 = \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{\beta}\cdot\varepsilon + b\left(\sqrt[3]{\beta}\right)^2\cdot\varepsilon^2\right) - \sqrt{\alpha_1 + \alpha_2\sqrt[3]{\beta}\cdot\varepsilon + \alpha_3\left(\sqrt[3]{\beta}\right)^2\cdot\varepsilon^2} \\ x_5 = \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{\beta}\cdot\varepsilon^2 + b\left(\sqrt[3]{\beta}\right)^2\cdot\varepsilon\right) + \sqrt{\alpha_1 + \alpha_2\sqrt[3]{\beta}\cdot\varepsilon^2 + \alpha_3\left(\sqrt[3]{\beta}\right)^2\cdot\varepsilon} \\ x_6 = \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{\beta}\cdot\varepsilon^2 + b\left(\sqrt[3]{\beta}\right)^2\cdot\varepsilon\right) - \sqrt{\alpha_1 + \alpha_2\sqrt[3]{\beta}\cdot\varepsilon^2 + \alpha_3\left(\sqrt[3]{\beta}\right)^2\cdot\varepsilon}, \end{cases}$$

qui contiennent la racine cubique $\sqrt[3]{\beta}$ et les trois racines carrées

$$\sqrt{\alpha_1 + \alpha_2\sqrt[3]{\beta} + \alpha_3\left(\sqrt[3]{\beta}\right)^2},\quad \sqrt{\alpha_1 + \alpha_2\sqrt[3]{\beta}\cdot\varepsilon + \alpha_3\left(\sqrt[3]{\beta}\right)^2\cdot\varepsilon^2},$$
$$\sqrt{\alpha_1 + \alpha_2\sqrt[3]{\beta}\cdot\varepsilon^2 + \alpha_3\left(\sqrt[3]{\beta}\right)^2\cdot\varepsilon}.$$

Cela posé, nous aurons

$$(5)\begin{cases} (x_1+x_2)(x_3+x_4)(x_5+x_6) = \beta + b^3\beta^2 \\ (x_1+x_2)(x_3+x_4) + (x_1+x_2)(x_5+x_6) + (x_3+x_4)(x_5+x_6) \\ \qquad = -3b\beta, \end{cases}$$

et nous avons à démontrer que les deux expressions ainsi trouvées

$$\beta + b^3\beta^2 \text{ et } -3b\beta$$

sont des nombres rationnels.

A cet effet, nous aurons à étudier les deux fonctions des six racines

$$(x_i + x_j) \cdot (x_k + x_l) \cdot (x_m + x_n)$$

$$(x_i + x_j)(x_k + x_l) + (x_i + x_j)(x_m + x_n) + (x_k + x_l)(x_m + x_n)$$

où i, j, k, l, m, n est une permutation quelconque des indices 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Il est évident que chacune de ces deux fonctions aura

$$\frac{K_{6,2} \cdot K_{4,2}}{6} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{2 \cdot 2 \cdot 6} = 15$$

valeurs qui seront les racines d'une équation du quinzième degré, définie dans la classe R_0.

De plus, ces deux équations du quinzième degré sont nécessairement réductibles, parce que le degré d'une équation réductible, qui est résoluble par des racines carrées et cubiques, doit toujours être un nombre de la forme $2^p \cdot 3^q$.

Supposons ensuite l'équation en question décomposée en des équations irréductibles, les racines de chacune de ces équations nouvelles seront conjuguées entre elles; c'est-à-dire qu'elles appartiennent, en vertu de la définition de la classe R_0, à la même classe.

Cela posé, nous avons à démontrer tout d'abord que les deux nombres

$$\beta + b^3\beta^2, \quad -3b\beta$$

appartiennent à une classe antérieure à celles qui contiennent les autres valeurs possibles des deux fonctions susdites des racines; car, ceci étant démontré, ces nombres se trouvent d'une équation du premier degré; c'est-à-dire qu'ils appartiennent à la classe R_0.

Quant à la démonstration susdite, nous supposons un moment que les nombres

$$b, \beta, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3,$$

qui se trouvent dans les expressions (4), obtenues pour les racines, soient des nombres quelconques de la classe R_0;

puis nous avons à démontrer que

$$(x_1 + x_2) \cdot (x_3 + x_4) \cdot (x_5 + x_6)$$

est le seul nombre rationnel parmi les 15 valeurs obtenues par la permutation des racines dans la fonction

$$(x_i + x_j)\,(x_k + x_l)\,(x_m + x_n)\,.$$

En effet, la combinaison susdite des racines donnera la seule valeur de la fonction, dont chacun des facteurs est conjugué à lui-même par rapport à la racine carrée et dont les trois facteurs sont en même temps conjugués entre eux par rapport au radical cubique. Nous cherchons non seulement les valeurs rationnelles de la fonction, mais aussi toute valeur de la fonction qui ne contient qu'une seule racine carrée.

Remarquons maintenant que la racine cubique doit toujours disparaître, il est impossible que deux des racines x_1, x_3, x_5 appartiennent au même facteur; c'est-à-dire que nous n'avons qu'à étudier encore les deux combinaisons suivantes

$$(x_1 + x_4) \cdot (x_3 + x_6) \cdot (x_5 + x_2)$$
$$(x_1 + x_6)\ (x_3 + x_2)\ (x_5 + x_4),$$

où les deux derniers facteurs peuvent être déduits du premier en y remplaçant $\sqrt[3]{\beta}$ par $\varepsilon \sqrt[3]{\beta}$ respectivement par $\varepsilon^2 \cdot \sqrt[3]{\beta}$.

Soient ensuite $\sqrt{A}$, $\sqrt{B}$, $\sqrt{\Gamma}$ les trois racines carrées dans les expressions (4), nous aurons

$$(6)\ \left\{\begin{aligned} x_1 + x_4 &= -\frac{1}{2}\sqrt[3]{\beta}\left(\varepsilon^2 + \varepsilon b \sqrt[3]{\beta}\right) + \sqrt{A} - \sqrt{B} \\ x_3 + x_6 &= -\frac{1}{2}\sqrt[3]{\beta}\left(1 + b \sqrt[3]{\beta}\right) + \sqrt{B} - \sqrt{\Gamma} \\ x_2 + x_5 &= -\frac{1}{2}\sqrt[3]{\beta}\left(\varepsilon + \varepsilon^2 b \sqrt[3]{\beta}\right) + \sqrt{\Gamma} - \sqrt{A}, \end{aligned}\right.$$

ce qui montrera immédiatement que les racines carrées ne disparaîtront pas dans le produit

$$(x_1 + x_4)(x_3 + x_6)(x_2 + x_5)$$

et c'est par conséquent la même chose avec la racine cubique sous le signe $\sqrt{}$. Il saute aux yeux qu'une étude du second produit

$$(x_1 + x_6)(x_3 + x_2)(x_5 + x_6)$$

conduira à un résultat analogue.

Supprimons maintenant l'hypothèse que

$$b,\ \beta,\ a_1,\ a_2,\ a_3$$

soient des nombres de R_0, nous verrons que la valeur spéciale

de la fonction
$$\begin{gathered}(x_1 + x_2)(x_3 + x_4)(x_5 + x_6)\\(x_i + x_j)(x_k + x_l)(x_m + x_n)\end{gathered}$$

appartient à une classe antérieure à celles qui contiennent toutes les autres valeurs de cette même fonction des racines. Conformément à la remarque faite au paragraphe 5 fin, il n'était pas suffisant à démontrer seulement que la valeur considerée de la fonction est la seule valeur rationnelle par rapport à b et β; mais il fallait de démontrer aussi qu'il n'existe pas aucune autre valeur de la fonction qui ne contienne qu'une seule racine carrée $\sqrt{\gamma}$, γ étant rationnelle par rapport à b et β, parce qu'une telle expression pourrait appartenir à la même classe que b et β.

Cela posé, nous avons démontré que l'expression

$$(x_1 + x_2)(x_3 + x_4)(x_5 + x_6) = \beta + b^3\beta^2$$

est un nombre rationnel et par conséquent une racine rationnelle d'une équation connue du quinzième degré.

Quant au nombre

$$(x_1 + x_2)(x_3 + x_4) + (x_1 + x_2)(x_5 + x_6) + (x_3 + x_4)(x_5 + x_6)$$
$$= -3b\beta,$$

nous verrons de la même manière, que quand la racine cubique $\sqrt[3]{\beta}$ doit disparaître d'une autre valeur de la fonction

$$(x_i + x_j)(x_k + x_l) + (x_i + x_j)(x_m + x_n) + (x_k + x_l)(x_m + x_n),$$

les seules combinaisons possibles seront les deux suivantes

$$(x_1 + x_4)(x_3 + x_6) + (x_1 + x_4)(x_5 + x_2) + (x_3 + x_6)(x_5 + x_2)$$

et

$$(x_1 + x_6)(x_3 + x_2) + (x_1 + x_6)(x_5 + x_4) + (x_3 + x_2)(x_5 + x_4).$$

Or, appliquons les valeurs de

$$x_1 + x_4, \quad x_3 + x_6, \quad x_2 + x_5$$

indiquées dans les formules (6), nous verrons immédiatement que les racines carrées ne pourront pas disparaître dans ces deux combinaisons; c'est la même chose avec la racine cubique sous le signe $\sqrt{\ }$.

De cette manière nous avons démontré que le nombre $-3b\beta$ peut être déterminée comme une racine rationnelle d'une équation connue du quinzième degré.

Cela posé, nous avons à déterminer les trois sommes

$$x_1 + x_2, \quad x_3 + x_4, \quad x_5 + x_6$$

à l'aide d'une équation cubique définie dans la classe R_0. Remarquons ensuite que le produit $x_1 x_2$ peut être exprimé sous forme d'une expression rationnelle de la somme $x_1 + x_2$, il ne nous reste qu'à déterminer x_1 et x_2 comme les racines d'une équation quadratique ; c'est-à-dire que la racine x_1 contiendra, dans ce cas, les radicaux suivants

$$\sqrt{\ }, \quad \sqrt[3]{\ }, \quad \sqrt{\ },$$

qui forment, successivement adjoints, le commencement de la suite 2) indiquée dans le schème (p. 441).

Pour mettre en pleine lumière la *possibilité d'une telle suite de radicaux*, nous n'avons qu'à désigner par

$$b, \ \beta, \ a_1, \ a_2, \ a_3$$

des nombres rationnels quelconques.

Dans ce cas les six expressions pour

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$$

indiquées dans (4) seront, comme on le voit immédiatement, les racines d'une équation, généralement irréductible, du sixième degré.

En second lieu, supposons que le radical à l'extérieur appartient à l'exposant 3, nous pouvons admettre

$$(7)\quad \begin{cases} x_1 = a + \sqrt[3]{\alpha} + b\left(\sqrt[3]{\alpha}\right)^2 \\ x_2 = a + \sqrt[3]{\alpha}\cdot\varepsilon + b\left(\sqrt[3]{\alpha}\right)^2\cdot\varepsilon^2 \\ x_3 = a + \sqrt[3]{\alpha}\cdot\varepsilon^2 + b\left(\sqrt[3]{\alpha}\right)^2\cdot\varepsilon. \end{cases}$$

Étudions maintenant le polynome

$$(8)\quad \begin{cases} (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) \\ = x^3 - 3ax^2 + 3(a^2 - b\alpha)x + 3(a^3 + \alpha + b^3\alpha^2 - 3ab\alpha), \end{cases}$$

ses coefficients pourront être ordonnés d'après la racine carrée indépendante $\sqrt{\beta}$; posons

$$(9)\quad \begin{cases} a = \frac{1}{3}\sqrt{\beta} \\ b\alpha = b_1 + b_2\sqrt{\beta} \\ \alpha + b^3\alpha^2 = c_1 + c_2\sqrt{\beta} \\ \alpha\cdot b^3\alpha^2 = b_1^3 + 3b_1b_2^2\beta + \sqrt{\beta}\,(3b_1^2b_2 + b_2^3\beta), \end{cases}$$

ce qui donnera pour α et b des expressions de la forme

$$\alpha = \frac{c_1 + c_2\sqrt{\beta}}{2} + \sqrt{C_1 + C_2\sqrt{\beta}}.$$

$$b = \frac{b_1 + b_2\sqrt{\beta}}{\alpha} = B_1 + B_2\sqrt{\beta} + (D_1 + D_2\sqrt{\beta})\sqrt{C_1 + C_2\sqrt{\beta}}.$$

Cela posé, nous aurons finalement

$$(10)\quad x_1 = \frac{1}{3}\sqrt{\beta} + \sqrt[3]{\frac{c_1 + c_2\sqrt{\beta}}{2} + \sqrt{C_1 + C_2\sqrt{\beta}}} +$$

$$+\left\{B_1 + B_2\sqrt{\beta} + (D_1 + D_2\sqrt{\beta})\sqrt{C_1 + C_2\sqrt{\beta}}\right\}\cdot\left(\sqrt[3]{\frac{c_1 + c_2\sqrt{\beta}}{2} + \sqrt{C_1 + C_2\sqrt{\beta}}}\right)^2,$$

et nous déterminons les cinq autres racines en y remplaçant $\sqrt{\beta}$ par $-\sqrt{\beta}$ et $\sqrt[3]{\alpha}$ par $\varepsilon \cdot \sqrt[3]{\alpha}$ et $\varepsilon^2 \cdot \sqrt[3]{\alpha}$.

Dans ce cas la combinaison

$$(x_1 + x_2 + x_3)(x_4 + x_5 + x_6) = -\beta$$

appartient à une classe antérieure à celles qui contiennent les autres valeurs possibles de la fonction des racines

$$(x_i + x_j + x_k)(x_l + x_m + x_n).$$

En effet, supposons que

$$\beta,\ c_1,\ c_2,\ C_1,\ C_2,\ B_1,\ B_2,\ D_1,\ D_2$$

soient des nombres rationnels quelconques, nous verrons immédiatement que $-\beta$ sera la seule valeur rationnelle de la fonction susdite et qu'il n'existe aucune autre valeur de cette même fonction, qui ne contient qu'une seule racine carrée. Pour le voir nous remarquons que quand la racine cubique disparaît dans le produit, il est évident que chacun des deux facteurs doit être conjugué à lui-même par rapport au radical susdit, de sorte que les trois racines x_i, x_j, x_k seront conjuguées entre elles ; c'est-à-dire que

$$(x_1 + x_2 + x_3)(x_4 + x_5 + x_6)$$

est la seule valeur que nous avons à regarder.

De cette manière nous retrouvons la suite 1) des solutions (p. 441), savoir

$$\sqrt{},\ \sqrt{},\ \sqrt[3]{};$$

c'est-à-dire que cette suite de radicaux adjoints et la suite

$$\sqrt{},\ \sqrt[3]{},\ \sqrt{},$$

que nous venons de trouver dans le cas précédent donnent les seules combinaisons des radicaux, trouvés dans les racines

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6;$$

de sorte que nous avons démontré la proposition suivante:

Une équation du sixième degré résoluble par des racines carrées et cubiques est toujours résoluble à l'aide d'une équation quadratique et d'une équation cubique; mais l'ordre dans lequel il faut résoudre ces deux équations auxiliaires pourra être différent.

Exemple. Le résolution de l'équation

$$x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$$

qui détermine la division du cercle en sept parties égales, exige la résolution des deux équations auxiliaires

$$y^3 + y^2 - 2y + 1 = 0$$

$$x + \frac{1}{x} = y,$$

prises dans cet ordre.

7. L'équation du huitième degré.

Quant à l'équation du huitième degré

$$f(x) = 0$$

qui est résoluble par des racines carrées et cubiques, il faut que les radicaux indépendants sont trois racines carrées.

Soient les racines

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6,\ x_7,\ x_8$$

et posons

$$x_1 = a + \sqrt{\alpha},\ x_2 = a - \sqrt{\alpha},$$

nous aurons

$$(x - x_1)\cdot(x - x_2) = x^2 - 2ax + a^2 - \alpha,$$

où les nombres $\quad -2a,\ a^2 - \alpha,\ \alpha$

pourront être ordonnés d'après une racine carrée $\sqrt{\beta}$, ce qui donnera

$$(1)\ \begin{cases} x_1 = a_1 + \sqrt{\beta} + \sqrt{\alpha_1 + \alpha_2\sqrt{\beta}} \\ x_2 = a_1 + \sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha_1 + \alpha_2\sqrt{\beta}} \\ x_3 = a_1 - \sqrt{\beta} + \sqrt{\alpha_1 - \alpha_2\sqrt{\beta}} \\ x_4 = a_1 - \sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha_1 - \alpha_2\sqrt{\beta}} \end{cases}$$

d'où

$$(2)\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4 = 4a_1 \\ \Sigma x_i x_j = 6a_1^2-2(\beta+\alpha_1) \\ \Sigma x_i x_j x_k = 4(a_1^3-a_1(\alpha_1+\beta)+\alpha_2\beta) \\ x_1x_2x_3x_4 = a_1^4+4a_1\cdot\alpha_2\beta-2a_1^2(\alpha_1+\beta)+(\alpha_1+\beta)^2-(4\alpha_1\beta+\beta\alpha_2^2). \end{cases}$$

De plus, les quatre expressions ainsi trouvées pourront être ordonnées d'après le dernier radical indépendant, savoir $\sqrt{\gamma}$. Posons

$$x_1+x_2+x_3+x_4 = a_2+4\sqrt{\gamma}$$
$$x_5+x_6+x_7+x_8 = a_2-4\sqrt{\gamma}\,;$$

puis supposons égale à zéro la somme des huit racines, nous aurons

$$a_2 = 0,$$

ce qui donnera

$$(3)\qquad a_1 = \sqrt{\gamma}.$$

Posons encore

$$(4)\begin{cases} \alpha_1+\beta = b_1+b_2\sqrt{\gamma} \\ \alpha_2\beta = c_1+c_2\sqrt{\gamma} \\ 4\alpha_1\beta+\beta\alpha_2^2 = d_1+d_2\sqrt{\gamma}. \end{cases}$$

Éliminons ensuite α_1 et α_2, les équations (4) donneront, pour la détermination de β, cette équation cubique

$$(5)\quad -4\beta^3+4\beta^2(b_1+b_2\sqrt{\gamma})-\beta(d_1+d_2\sqrt{\gamma})+(c_1+c_2\sqrt{\gamma})^2=0.$$

Supposons un moment donnés les nombres

$$b_1,\ b_2,\ c_1,\ c_2,\ d_1,\ d_2,\ \gamma,$$

nous avons à déterminer β à l'aide de l'équation cubique (5), puis tirer de (4) les valeurs de α_1 et α_2, qui deviennent des expressions rationnelles par rapport à β. Remplaçons, dans ces expressions, $\sqrt{\gamma}$ par $-\sqrt{\gamma}$, les nombres β, α_1 et

α_2 se transforment dans β', α'_1 et α'_2 respectivement, et les huit racines de l'équation proposée s'expriment comme suit

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned}
x_1 &= \sqrt{\gamma}+\sqrt{\beta}+\sqrt{\alpha_1+\alpha_2\sqrt{\beta}}\\
x_2 &= \sqrt{\gamma}+\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha_1+\alpha_2\sqrt{\beta}}\\
x_3 &= \sqrt{\gamma}-\sqrt{\beta}+\sqrt{\alpha_1-\alpha_2\sqrt{\beta}}\\
x_4 &= \sqrt{\gamma}-\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha_1-\alpha_2\sqrt{\beta}}\\
x_5 &= -\sqrt{\gamma}+\sqrt{\beta'}+\sqrt{\alpha'_1+\alpha'_2\sqrt{\beta'}}\\
x_6 &= -\sqrt{\gamma}+\sqrt{\beta'}-\sqrt{\alpha'_1+\alpha'_2\sqrt{\beta'}}\\
x_7 &= -\sqrt{\gamma}-\sqrt{\beta'}+\sqrt{\alpha'_1-\alpha'_2\sqrt{\beta'}}\\
x_8 &= -\sqrt{\gamma}-\sqrt{\beta'}-\sqrt{\alpha'_1-\alpha'_2\sqrt{\beta'}}.
\end{aligned}\right.$$

Nous aurons maintenant

$$(7)\qquad (x_1+x_2+x_3+x_4)\,(x_5+x_6+x_7+x_8) = -\gamma,$$

ce qui est la seule valeur rationnelle de la fonction des racines

$$(x_i+x_j+x_k+x_l)\,(x_m+x_n+x_p+x_q),$$

où i, j, k, l, m, n, p, q est une permutation quelconque des indices 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

En effet, désignons pour le moment par

$$b_1,\ b_2,\ c_1,\ c_2,\ d_1,\ d_2,\ \gamma$$

des nombres rationnels quelconques, il est évident qu'une valeur de la fonction susdite ne devient rationelle que dans le cas où les sept racines carrées

$$\sqrt{\gamma},\ \sqrt{\beta},\ \sqrt{\beta'}$$
$$\sqrt{\alpha_1+\alpha_2\sqrt{\beta}},\ \sqrt{\alpha_1-\alpha_2\sqrt{\beta}}$$
$$\sqrt{\alpha'_1+\alpha'_2\sqrt{\beta'}},\ \sqrt{\alpha'_1-\alpha'_2\sqrt{\beta'}}$$

disparaissent; c'est-à-dire qu'il faut que les deux facteurs correspondants

$$x_i + x_j + x_k + x_l, \quad x_m + x_n + x_p + x_q$$

deviennent conjugués par rapport à seulement une seule de ces racines carrées. Or, le produit étant conjugué à lui même par rapport à toutes les racines carrées, il faut que chacun de ses facteurs devient conjugué à lui même par rapport aux six autres.

Supposons par exemple les deux facteurs conjugués par rapport à $\sqrt{\gamma}$, le facteur qui contient la racine x_1 doit contenir aussi x_2 pour faire disparaître la racine $\sqrt{\alpha_1 + \alpha_2\sqrt{\beta}}$, et puis x_3 et x_4 à cause de $\sqrt{\beta}$, ce qui donnera la valeur du produit égale à $-\gamma$.

Soient ensuite les deux facteurs conjugués par rapport à $\sqrt{\beta}$, le facteur qui contient la racine x_1 dont contenir aussi x_2 pour faire disparaître $\sqrt{\alpha_1 + \alpha_2\sqrt{\beta}}$, et puis deux des racines x_5, x_6, x_7, x_8 à cause de $\sqrt{\gamma}$; mais dans ce cas nous avons introduit un ou deux racines carrées nouvelles qui ne disparaîtront pas.

Enfin, supposons les deux facteurs conjugués par rapport à $\sqrt{\alpha_1 + \alpha_2\sqrt{\beta}}$, le facteur qui contient x_1 doit contenir aussi ou x_3 ou x_4, pour faire disparaître $\sqrt{\beta}$, et puis deux des racines x_5, x_6, x_7, x_8 à cause de $\sqrt{\gamma}$; mais dans ce cas aussi nous avons introduit des racines carrées nouvelles qui ne disparaîtront pas.

Tous les cas possibles seront analogues à ceux que nous avons regardé.

Donc nous avons démontré que, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2, γ étant des nombres rationnels, la valeur

$$(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)(x_5 + x_6 + x_7 + x_8)$$

sera la seule valeur rationnelle de la fonction des racines

$$(x_i + x_j + x_k + x_l)(x_m + x_n + x_p + x_q),$$

toute autre valeur de cette fonction contenant en effet au moins une racine carrée sous le signe de laquelle se trouve encore des radicaux carrés et cubiques.

Supprimons maintenant notre hypothèse faite sur les nombres

$$b_1, \; b_2, \; c_1, \; c_2, \; d_1, \; d_2, \; \gamma,$$

la démonstration susdite nous montre que la valeur spéciale

$$(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \cdot (x_5 + x_6 + x_7 + x_8)$$

appartient à une classe antérieure à celles qui contiennent les autres valeurs de la fonction

$$(x_i + x_j + x_k + x_l)\,(x_m + x_n + x_p + x_q).$$

Or, le nombre des valeurs de cette fonction étant égal à

$$\frac{1}{2} K_{8,4} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 35,$$

il est évident que la fonction peut être déterminée à l'aide d'une équation du trente-cinquième degré, définie dans la classe R_0 et résoluble par des racines carrées et cubiques; c'est-à-dire qu'elle pourra être décomposée en des équations irréductibles dont les degrés sont des nombres de la forme $2^p \cdot 3^q$.

Remarquons ensuite que toutes les racines d'une telle équation irréductible appartiennent à la même classe, nous verrons que la valeur spéciale

$$(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)\,(x_5 + x_6 + x_7 + x_8)$$

peut être déterminée à l'aide d'une équation linéaire, savoir qu'elle est encore un nombre rationnel.

Supposons maintenant trouvée la valeur

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \sqrt{\gamma},$$

nous pourrons déterminer les quatre racines x_1, x_2, x_3, x_4 à l'aide d'une équation biquadratique, dont les coefficients sont rationnels par rapport à $\sqrt{\gamma}$; c'est-à-dire que les racines de l'équation du huitième degré contiennent les radicaux

$$\sqrt{}\,,\quad \sqrt{}\,,\quad \sqrt[3]{}\,,\quad \sqrt{}\,,\quad \sqrt{}\,,$$

et nous aurons la proposition suivante:

L'équation du huitième degré résoluble par des racines carrées et cubiques pourra être résolue à l'aide d'une équation quadratique, puis d'une équation biquadratique.

8. L'équation du neuvième degré.

Nous avons à étudier l'équation du neuvième degré

$$f(x) = 0$$

résoluble par des racines carrées et cubiques, que nous supposons transformée de sorte que la somme de ces racines est égale à zéro, savoir

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 = 0.$$

Il faut que les radicaux indépendants sont deux radicaux cubiques. Posons

$$(1)\left\{\begin{aligned} x_1 &= a + \sqrt[3]{\alpha} + b\cdot\left(\sqrt[3]{\alpha}\right)^2 \\ x_2 &= a + \sqrt[3]{\alpha}\cdot\varepsilon + b\cdot\left(\sqrt[3]{\alpha}\right)^2\cdot\varepsilon^2 \\ x_3 &= a + \sqrt[3]{\alpha}\cdot\varepsilon^2 + b\cdot\left(\sqrt[3]{\alpha}\right)^2\cdot\varepsilon, \end{aligned}\right.$$

nous aurons

$$(2)\left\{\begin{aligned} &(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \\ &= x^3 - 3ax^2 + 3(a^2 - b\alpha)x - (a^3 + \alpha + b^3\alpha^2 - 3ab\alpha) \end{aligned}\right.$$

et les coefficients de ce polynome pourront être ordonnés d'après le second radical indépendant $\sqrt[3]{\beta}$.

Posons

$$(3)\left\{\begin{aligned} a &= \frac{1}{3}\sqrt[3]{\beta} + \frac{a_1}{3}\left(\sqrt[3]{\beta}\right)^2 \\ b\alpha &= b_1 + b_2\sqrt[3]{\beta} + b_3\left(\sqrt[3]{\beta}\right)^2 \\ \alpha + b^3\alpha^2 &= c_1 + c_2\sqrt[3]{\beta} + c_3\left(\sqrt[3]{\beta}\right)^2, \end{aligned}\right.$$

nous pourrons déterminer a et b^3a^2 comme des racines d'une équation quadratique, et supposons trouvé le nombre a, la valeur de b pourra être trouvée par l'équation

$$ba = b_1 + b_2\sqrt[3]{\beta} + b_3\left(\sqrt[3]{\beta}\right)^2,$$

ce qui donnera, en vertu de (1), les trois racines x_1, x_2, x_3 exprimées par

$$\sqrt[3]{\beta},\ a_1,\ b_1,\ b_2,\ b_3,\ c_1,\ c_2,\ c_3$$

et une racine carrée $\sqrt{\gamma}$, γ étant de la forme $\gamma = e_1 + e_3\sqrt[3]{\beta} + e_3\left(\sqrt[3]{\beta}\right)^2$.

De plus nous aurons

$$(4)\left\{\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= \sqrt[3]{\beta} + a_1\left(\sqrt[3]{\beta}\right)^2 \\ x_4 + x_5 + x_6 &= \sqrt[3]{\beta}\cdot\varepsilon + a_1\cdot\left(\sqrt[3]{\beta}\right)^2\cdot\varepsilon^2 \\ x_7 + x_8 + x_9 &= \sqrt[3]{\beta}\cdot\varepsilon^2 + a_1\cdot\left(\sqrt[3]{\beta}\right)\cdot\varepsilon, \end{aligned}\right.$$

ce qui donnera

$$(5)\left\{\begin{aligned} &(x_1+x_2+x_3)(x_4+x_5+x_6)+(x_1+x_2+x_3)(x_7+x_8+x_9)+ \\ &\qquad + (x_4+x_5+x_6)(x_7+x_8+x_9) = -3a_1\beta \end{aligned}\right.$$

et

$$(6)\ (x_1+x_2+x_3)(x_4+x_5+x_6)(x_7+x_8+x_9) = -(\beta + a_1^3\beta^2).$$

Remarquons que $\sqrt[3]{\beta}$ est disparu dans les valeurs spéciales (5) et (6) des deux fonctions des racines

$$f_1(x_1, x_2, \ldots x_9) = (x_i + x_j + x_k)(x_l + x_m + x_n) + \\ + (x_i + x_j + x_k)(x_p + x_q + x_r) + (x_l + x_m + x_n)(x_p + x_q + x_r)$$

$$f_2(x_1, x_2 \ldots x_9) = (x_i + x_j + x_k)(x_l + x_m + x_n)(x_p + x_q + x_r),$$

fonctions qui auront toutes deux

$$\frac{1}{6}\cdot K_{9,3}\cdot K_{6,3} = 280$$

valeurs différentes, et qui se déterminent par conséquent à l'aide de deux équations du degré 280.

Or, ces deux équations étant résolubles par des racines carrées et cubiques, elles pourront être décomposées en des équations irréductibles, dont les degrés sont des nombres de la forme $2^r \cdot 3^s$.

Nous avons encore à démontrer que les deux valeurs particulières

$$-3a_1\beta, \quad -(\beta + a_1^3\beta^2)$$

des fonctions f_1 et f_2 sont des nombres rationnels, parce qu'elles appartiennent à une classe antérieure à celles qui contiennent les autres valeurs de f_1 ou de f_2.

Remplaçons $\sqrt[3]{\beta}$ par une de ses valeurs conjuguées, les nombres a, b, α se transforment dans a', b', α' ou dans a'', b'', α'', et nous aurons

$$(7)\left\{\begin{aligned}
x_4 &= a' + \sqrt[3]{\alpha'} + b'\left(\sqrt[3]{\alpha'}\right)^2 \\
x_5 &= a' + \sqrt[3]{\alpha'} \cdot \varepsilon + b'\left(\sqrt[3]{\alpha'}\right)^2 \cdot \varepsilon^2 \\
x_6 &= a' + \sqrt[3]{\alpha'} \cdot \varepsilon^2 + b'\left(\sqrt[3]{\alpha'}\right)^2 \cdot \varepsilon \\
x_7 &= a'' + \sqrt[3]{\alpha''} + b''\left(\sqrt[3]{\alpha''}\right)^2 \\
x_8 &= a'' + \sqrt[3]{\alpha''} \cdot \varepsilon + b''\left(\sqrt[3]{\alpha''}\right)^2 \cdot \varepsilon^2 \\
x_9 &= a'' + \sqrt[3]{\alpha''} \cdot \varepsilon^2 + b''\left(\sqrt[3]{\alpha''}\right)^2 \cdot \varepsilon.
\end{aligned}\right.$$

Supposons maintenant, à l'instant, rationnels les nombres

$$a_1,\ b_1,\ b_2,\ b_3,\ c_1,\ c_2,\ c_3,\ \beta,$$

nous avons à déterminer les valeurs rationnelles des deux fonctions f_1 et f_2 des racines.

Étudions d'abord la fonction f_1; elle ne pourra être rationnelle que dans les deux cas suivants:

1°. Chacun des trois membres de f_1 est supposé conjugué à lui-même par rapport à respectivement

$$(8) \qquad \sqrt[3]{\alpha},\ \sqrt[3]{\alpha'},\ \sqrt[3]{\alpha''},$$

ce qui exige que chaque facteur du membre susdit est conjugué à lui-même, et les trois membres de f_1 sont supposés conjugués entre eux par rapport à $\sqrt[3]{\beta}$; dans ce cas nous avons déjà trouvé la valeur $-3a_1\beta$.

2°. Supposons conjugués par rapport aux racines cubiques (8) les trois membres de f_1, il sera nécessaire de supposer aussi chaque membre conjugué à lui-même par rapport à $\sqrt[3]{\beta}$; la seule combinaison correspondante sera

$$(9)\left\{\begin{aligned}&(x_1+x_4+x_7)(x_2+x_5+x_8)+(x_1+x_4+x_7)(x_3+x_6+x_9)\\&\qquad+(x_2+x_5+x_8)(x_3+x_6+x_9).\end{aligned}\right.$$

Or, les trois racines cubiques (8) étant disparus de l'expression (9), cette valeur spéciale de f_1 sera en effet conjuguée à elle-même par rapport à $\sqrt[3]{\beta}$; cependant elle ne peut pas être rationnelle, parce qu'elle contient la racine carrée $\sqrt{\gamma}$, γ étant de la forme $e_1+e_2\sqrt[3]{\beta}+e_3(\sqrt[3]{\beta})^2$.

Quant à la fonction $f_2(x_1\,x_2\,\ldots\,x_9)$, la valeur particulière

$$-(\beta+a_1{}^3\beta^2)$$

sera la seule valeur rationnelle, parce qu'elle représente la seule combinaison dans laquelle les trois racines cubiques (8) disparaîtront.

Supprimons maintenant l'hypothèse que

$$a_1,\ b_1,\ b_2,\ b_3,\ c_1,\ c_2,\ c_3,\ \beta$$

soient des nombres rationnels, nous verrons que les valeurs spéciales

$$-3a_1\beta,\ -(\beta+a_1{}^3\beta^2)$$

de f_1 et f_2 appartiennent à une classe antérieure à celles qui contiennent toutes les autres valeurs des fonctions susdites; c'est-à-dire que les équations du degré 280 qui déterminent f_1 et f_2 auront une racine rationnelle toutes deux.

Cela posé, nous savons que les sommes

$$x_1+x_2+x_3,\ x_4+x_5+x_6,\ x_7+x_8+x_9$$

seront les racines d'une équation cubique définie dans la classe R_0. De plus

$$x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 , \quad x_1 x_2 x_3$$

seront des fonctions rationnelles de $x_1 + x_2 + x_3$; c'est-à-dire que x_1, x_2, x_3 seront les racines d'une nouvelle équation cubique; les radicaux qu'il faut adjoindre successivement pour déterminer les racines susdites deviennent par conséquent

$$\sqrt{}, \quad \sqrt[3]{}, \quad \sqrt{}, \quad \sqrt[3]{}.$$

De cette manière nous avons démontré la proposition suivante:

L'équation du neuvième degré résoluble par des racines carrées et cubiques peut toujours être résolue à l'aide de deux équations cubiques.

Je remercie beaucoup M. Niels Nielsen qui a bien voulu traduire en français le mémoire présent.